数理解析研究所講究録
159巻 1972年 27-39

Thirring model – A constructive field theory

神戸大理　麦林布道
〃　長町重昭

Thirringモデルにassociated bosonの考えを導入することは，既にKlaiber[1]によってなされている。研究会において，この考えをもとにして構成的場の量子論の観点からThirringモデルを眺める可能性を指摘したが，そのすぐ後でVolovich-Sushko[2]の全く同じ構想の論文が出たので，彼等の結果をもとり入れて報告をまとめる。

Thirringモデルは1958年にThirring[3]によって提出されて以来，2次元ではあるが，解ける相対論的に不変なモデルとしてきわだった位置を占めて来た。Thirringモデルに関する論文は数えきれないくらい多くあり，大きく分けると，operator solutionに関するものと，Green関数ないしWightman関数に関するものがある。また，そのいわゆる"解"なるものも論文の数同様きわめて多様である。Wightmanの公理系をみたすnon-trivialな場の量子論の存在が問題になったとき，

Thirring モデルはその第一候補にあげられたのであるが，決定的な結論がえられないまゝ，$\lambda(\phi^{2n})_2$ 理論や Y_2 理論に先を越されてしまった。公理論的場の量子論の立場からのこのモデルの分析については，Wightman[4] および Klaiber[1] の講義録を見れば十分であろう。Thirring モデルにおける散乱演算子の存在証明に関する Berezin[5] の論文もあげておこう。

Thirring モデルの研究でこれまでに最も欠如していたのは，Hamiltonian field theory としての数学的な分析である。最近の言葉でいえば，Thirring モデルは構成的場の量子論にまだ十分組みこまれていない。その理由として考えられるのは，一つには $\lambda(\phi^{2n})_2$ や Y_2 と違って，Thirring モデルはくりこみ可能ではあるが"超くりこみ可能"ではないこと，また，解けるモデルとしての特性を失わないように切断（cut off）を入れることの難しさである。Thirring モデルを構成的場の量子論の一つとしてとらえたとき，operator solution を直接吟味することは，上記の第2の理由からしてまず駄目であろう。これに対して，2次元の質量0のフェルミ粒子の特性を利用した associated boson の方法は考えてみる価値がありそうである。かって Uhlenbrock[6] が Luttinger モデルについて行ったように，Thirring モデルの Hamiltonian を associated boson の演算子に関する2次形式の形に書くことが出来れば，Bogoliubov 変換による Hamiltonian の対角化が可能になり，この変換を中性スカラー・モデルにおけるユニタリ変換と対比して考えれば，くりこみの道もひらけてくるであろう。これが我々のねらいであったが，このねらいの当っていたことが Volovich-Sushko によって示されたようである。

ここでは，Bogoliubov 変換あたり迄を述べ，そのあとは，今後の発展が当然予想されるので，それを待って次回にゆずることにする。

§ 1. Cutoff Hamiltonian

Thirring モデルの formal Hamiltonian は

(1) $$H = -i\int_{-\infty}^{\infty} :\psi^*(x)\,\gamma^5 \frac{\partial}{\partial x}\psi(x):\,dx + \frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty} :j^\mu(x)\,j_\mu(x):\,dx$$

で与えられる。ここに

$$j^\mu(x) = :\psi^*(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x): \qquad \mu = 0, 1.$$

$$\gamma^0 = \sigma_2,\quad \gamma^1 = i\sigma_1,\quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3.$$

$\psi(x)$ は2次元時空の質量0のスピノル粒子の波動関数である。

体積発散をおさえるために，系を長さLの箱の中に閉じこめて周期的境界条件を課す。また，紫外発散をおさえるために，相互作用に形状因子 $f_\sigma(x-y)$ を入れる。最終的には，L

$\to \infty$, $\sigma \to \infty$ の極限を考える。このとき $f_\sigma(x-y) \to \delta(x-y)$.

いま,

$$\Gamma = \{ p = \frac{2\pi}{L} n \, ; \, n \in \mathbb{Z} \},$$

$$\Gamma' = \{ p \in \Gamma \, ; \, p \neq 0 \}, \quad \Gamma^+ = \{ p \in \Gamma \, ; \, p > 0 \}$$

とおき, Γ, Γ', Γ^+ にわたる和を簡単にそれぞれ.

$$\sum_p = \sum_{p \in \Gamma}, \quad \sum_p{}' = \sum_{p \in \Gamma'}, \quad \sum_p{}^+ = \sum_{p \in \Gamma^+}$$

で表わす。波動関数は.

$$\psi_\rho(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} \hat{\psi}_\rho(p)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_p e^{ipx} [u_\rho(p) a_p + v_\rho(p) b^*_{-p}]$$

と展開される。ここに

$$\{ a^*_p, a_q \} = \{ b^*_p, b_q \} = \frac{L}{2\pi} \delta_{p,q}$$

$$\begin{cases} u_1(p) = u_2(-p) = v_1(-p) = v_2(p) = \theta(p), & p \neq 0 \\ u_1(0) = v_2(0) = 1, \quad v_1(0) = u_2(0) = 0 \end{cases}$$

また, 以下

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

と約束する。

この結果, Hamiltonian (1) は.

(2)
$$H(L,\sigma) = H_0(L,\sigma) + H_I(L,\sigma)$$
$$= \frac{2\pi}{L}\sum_p |p|\,[a_p^* a_p + b_p^* b_p]$$
$$+ 2g\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} :\psi_1^*(x)\psi_1(x)\,f_\sigma(x-y)\,\psi_2^*(y)\psi_2(y):\,dx\,dy$$

となる。

演算子 $\{a_p^\#\}$, $\{b_p^\#\}$ （# は消滅・生成演算子を総称する記号）の作用する Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Asy}\,(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$$

と書ける。ここに，$D^+ = D^- = l^2(\Gamma)$ であって

$$z = \{z_p\} \in l^2(\Gamma) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \sum_p |z_p|^2 < \infty .$$

また，$\mathrm{Asy}\,(D^+ \oplus D^-)^{\otimes n}$ は n 階の反対称テンソル積を意味する。

§2. Associated boson.

2次元時空において質量0のフェルミ演算子2個から，質量0のボーズ演算子（いわゆる associated boson）をつくる表式は，既に Uhlenbrock[6] と Klaiber[7] によって与えられている。（両者の表式は一見異なるが，互いに同値である

ことが示せる.) ここでは Klaiber 流の表式を使う.

(3) $$A_p = \frac{2\pi}{L}\frac{1}{\sqrt{|p|}}\left\{\theta(p)\sum_q :\hat{\varphi}_1^*(q)\hat{\varphi}_1(q+p): + \theta(-p)\sum_q :\hat{\varphi}_2^*(q)\hat{\varphi}_2(q+p):\right\},\quad p\in\Gamma'$$

$D_0(L)\subset\mathcal{H}_F(L)$ を粒子数有限の部分空間とし,

$$A_p^+ = A_p^*|_{D_0(L)}$$

とおく. Φ, $\Psi\in D_0(L)$ のとき

(4) $$[A_p, A_q]\Phi = [A_p^+, A_q^+]\Phi = 0,\qquad [A_p, A_q^+]\Phi = \frac{L}{2\pi}\delta_{p,q}\Phi,$$

および $$(A_p\Phi, \Psi) = (\Phi, A_p^+\Psi)$$

をみるのは容易である. 従って $\{A_p^\#\}$ はボーズの交換関係をみたす.

current vector $j^\mu(x,t)$ は通常の保存則 $\partial_\mu j^\mu(x,t)=0$ の他に $\partial_\mu\varepsilon^{\mu\nu}j_\nu(x,t)=0$ をみたす. 但し, $\varepsilon^{\mu\nu}=-\varepsilon^{\nu\mu}$, $\varepsilon^{01}=-1$. Thirring モデルが解ける理由はここにあるが, このことから

$$j^\mu(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial^\mu j(x,t)$$

となるスカラー $j(x,t)$ の存在することが期待できる (c数ならば当然). 実際, 量子化された場の場合にもこのような

$j(x,t)$ があって，$\{A_p^\#\}$ を用いて次のように表わせる

$$(5)\qquad j(x,t) = -i\frac{\sqrt{2\pi}}{L}\sum_p{}'\frac{1}{\sqrt{2|p|}}\left[e^{i|p|t-ipx}A_p^+ - e^{-i|p|t+ipx}A_p\right]$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{L}\left[t(\Lambda_1+\Lambda_2)+x(\Lambda_1-\Lambda_2)\right]$$

ここに，

$$(6)\qquad \Lambda_p = \frac{2\pi}{L}\sum_q\left[u_p(q)a_q^* a_q - v_p(-q)b_q^* b_q\right],\qquad p=1,2$$

演算子 $\Lambda_1(\Lambda_2)$ はそれぞれ非負（負）の運動量をもつ a 粒子の数から正（非正）の運動量をもつ b 粒子の数を引いたものを表わし，他の主要な演算子のすべてと交換する．

$$(7)\qquad \begin{aligned}&[\Lambda_1,\Lambda_2]=0,\\&[A_p^\#,\Lambda_p]=[H_0(L,\sigma),\Lambda_p]=[H_I(L,\sigma),\Lambda_p]=0.\end{aligned}$$

従って，Λ_1 と Λ_2 の同時固有空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ を，

$$\Lambda_p\mathcal{H}(\lambda)=\lambda_p\mathcal{H}(\lambda),\qquad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2$$

とすると，Fock 空間 $\mathcal{H}_F(L)$ は

$$\mathcal{H}_F(L)=\bigoplus_\lambda\mathcal{H}(\lambda)$$

と分解される．

Fock 真空を Ω_0 とすると，$D_0(\lambda)=D_0(L)\cap\mathcal{H}(\lambda)$ は，

$$\prod_{i=1}^{m^+}a_{q_i^+}^*\prod_{j=1}^{m^-}a_{q_j^-}^*\prod_{r=1}^{n^+}b_{p_r^+}^*\prod_{s=1}^{n^-}b_{p_s^-}^*\,\Omega_0$$

なる形の基礎ベクトルをもっている。ただし、

$$q_i^+ \geqq 0,\quad q_j^- < 0,\quad p_r^+ > 0,\quad p_s^- \leqq 0$$

$$m^+ - n^+ = \lambda_1,\quad m^- - n^- = \lambda_2$$

である。 $A_p^\#(\lambda) = A_p^\#|_{D_0(\lambda)}$ とかくと、 $\{A_p^\#(\lambda)\}_{p\in\Gamma'}$ は $\mathcal{H}(\lambda)$ で Fock 表現可能である。 $A_p(\lambda)\Omega_0(\lambda) = 0$ で定義される各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は Fock の真空 Ω_0 から計算される： $\Omega_0(\lambda) = U_\lambda \Omega_0$

$$U_\lambda = \Big[\delta_{\lambda_1 0} + \theta(\lambda_1 - 1)\prod_{\mu=0}^{\lambda_1-1} a^*_{\frac{2\pi}{L}\mu} + (1-\theta(\lambda_1))\prod_{\nu=1}^{|\lambda_1|} b^*_{\frac{2\pi}{L}\nu}\Big]$$

$$\cdot\Big[\delta_{\lambda_2 0} + \theta(\lambda_2 - 1)\prod_{\mu=1}^{\lambda_2} a^*_{-\frac{2\pi}{L}\mu} + (1-\theta(\lambda_2))\prod_{\nu=1}^{|\lambda_2|-1} b^*_{-\frac{2\pi}{L}\nu}\Big].$$

§ 3. Kronig の identity

相互作用 Hamiltonian $H_I(L,\sigma)$ は $\{A_p^\#\}$ と Λ_p で書くことが出来て、

$$(8)\quad H_I(L,\sigma) = 2g\,\frac{2\pi}{L}\sum_p{}^+ p\,\chi_\sigma(p)\,[A_p^+ A_{-p}^+ + A_p A_{-p}] + 2g\,\frac{2\pi}{L}\Lambda_1\chi_\sigma(0)\Lambda_2$$

となる。ここに

$$\chi_\sigma(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ipx} f_\sigma(x)\,dx.$$

(8) の第1項が定義されるために、 $\sum_p{}^+ |p\,\chi_\sigma(p)|^2 < \infty$ を仮定す

る。

$H_0(L,\sigma)$ と $A_p^{\#}$ との交換関係を計算すると、$\Phi\in D_0(L)$ に対して

$$[H_0(L,\sigma), A_p^{+}]\Phi = |p| A_p^{+}\Phi$$

となることがわかる。従って、$H_0(\lambda) = H_0(L,\sigma)|_{D_0(L)}$ に対して

$$[(H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L}\sum_p |p| A_p^{+}(\lambda) A_p(\lambda)), A_q^{\#}(\lambda)] = 0$$

が成り立つ。$\{A_p^{\#}(\lambda)\}$ の既約性から

(9) $$H_0(\lambda) - \frac{2\pi}{L}\sum_p |p| A_p^{+}(\lambda) A_p(\lambda) = E_0(\lambda) I(\lambda).$$

ここに、$I(\lambda)$ は $\mathcal{H}(\lambda)$ の恒等演算子である。この結果は、各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ でフェルミ粒子の自由 Hamiltonian $H_0(\lambda)$ はボーズ粒子の free Hamiltonian に丁度等しいことを示している。これを Kronig の恒等式という。$E_0(\lambda)$ はこの式を $\Omega_0(\lambda)$ に作用させることによって定まる。

$$E_0(\lambda) = \frac{\pi}{L}[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2]$$

このようにして、total Hamiltonian $H(L,\sigma)$ は各部分空間 $\mathcal{H}(\lambda)$ (sector と呼ぶ) に働く Hamiltonian (sector Hamiltonian と呼ぶ) の直和に分解されることがわかった。

$$H(L,\sigma) = \bigoplus_{\lambda} H(\lambda),$$

$$(10) \qquad H(\lambda) = \frac{2\pi}{L} \sum_{p} |p| A_p^+(\lambda) A_p(\lambda)$$

$$+ 2g \frac{2\pi}{L} \sum_{p}^{+} p \chi_0(p) [A_p^+(\lambda) A_{-p}^+(\lambda) + A_p(\lambda) A_{-p}(\lambda)] + E_g(\lambda) I(\lambda)$$

ここに

$$E_g(\lambda) = \frac{\pi}{L} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1 + \lambda_2] + \frac{\pi}{L} 4g \chi_\sigma(0) \lambda_1 \lambda_2 .$$

§ 4. Bogoliubov 変換.

$H(\lambda)$ は $A_p^{\#}(\lambda)$ に関する quadratic Hamiltonian である。その本質的自己共役性は $\chi_\sigma(p)$ に対する条件 $\sum_p^+ |p\chi_\sigma(p)|^2 < \infty$ によって保証されている。[7] さらに $\chi_\sigma(-p) = \chi_\sigma(p)$ を仮定し

$$\varphi_p = \frac{1}{2} \operatorname{th}^{-1}(-2\chi_\sigma(p))$$

とおくと、Bogoliubov 変換

$$A_p(\lambda) \to \tilde{A}_p(\lambda) = \operatorname{ch}\varphi_p A_p(\lambda) + \operatorname{sh}\varphi_p A_{-p}^+(\lambda)$$

$$A_p^+(\lambda) \to \tilde{A}_p^+(\lambda) = \operatorname{sh}\varphi_p A_{-p}(\lambda) + \operatorname{ch}\varphi_p A_p^+(\lambda)$$

によって $H(\lambda)$ は対角化される。$\chi_\sigma(p)$ の条件より、$\sum_p |\chi_\sigma(p)|^2 < \infty$ であるから、この変換はユニタリ変換であって、

$$A_p(\lambda) = U(\lambda) \tilde{A}_p(\lambda) U^{-1}(\lambda)$$

となるユニタリ演算子 $U(\lambda)$ が存在する。実際

$$(11) \qquad U(\lambda) = \exp\left\{-\frac{2\pi}{L}\sum_p{}^{+}\varphi_p\left[A_p^+(\lambda)A_{-p}^+(\lambda) - A_p(\lambda)A_{-p}(\lambda)\right]\right\}.$$

となる。これに対応して $\mathcal{H}(\lambda)$ の真空 $\Omega_0(\lambda)$ は

$$\Omega_0(\lambda) \to \Phi_0(\lambda) = U^{-1}(\lambda)\Omega_0(\lambda)$$

と変換される。$H(\lambda)$ の対角化は

$$(12) \quad U(\lambda)H(\lambda)U^{-1}(\lambda) = \sum_p \omega^\sigma(p)A_p^+(\lambda)A_p(\lambda) + \cdots$$

となる。右辺において、λ に依存する c 数項が省略されている。また

$$(13) \qquad \omega^\sigma(p) = |p|\,\mathrm{sech}\,2\varphi_p = |p|\sqrt{1-4g^2\chi_\sigma(p)^2}$$

がエネルギー・スペクトルを与える。空間の切断をとり除いた極限（$\sigma\to\infty$ で $f_\sigma(x)\to\delta(x)$）では $\chi_\sigma(p) = \frac{1}{2\pi}$ であるから、そのとき $\omega^\sigma(p) \to |p|\sqrt{1-g^2/\pi^2}$ となる。この分散式は相対論的に不変な理論をめざすとからは工合が悪い。$\omega(p) = |p|$ となるべきである。これを是正するために、Volovich-Sushko は $A_p^\#(\lambda)$ について2次のくり込み項を Hamiltonian につけ加えている。

Hamiltonian の対角化は，$A_p^\#(\lambda)$ を $A_p^\#$ で置きかえることによって、全 Fock 空間に拡張できることを付言しておく。

以上述べたことから判るように，associated boson を導入してみると，Thirring モデルの構造は中性スカラー・モデルの構造と著しく似通っている．即ち，$\mathcal{H}(\lambda)$ は中性スカラー・モデルにおける核子数一定の sector に対応し，associated boson は，勿論，中性スカラー・モデルにおける中間子に対応している．また，フェルミ粒子の演算子は，中性スカラー・モデルにおける核子演算子の如く，相異なる sectors をつないでいる．さらに，上記の Bogoliubov 変換はまさに dressing transformation である．従って，Volovich-Sushko のこのあとの議論はおおよその見当がつく．ただ，Thirring モデルでは $\psi_p^{\#}(p)$ は $A_p^{\#}$ と交換しないので，中性スカラー・モデルの場合と違って trivial な理論にはならない．

文献

1) B. Klaiber, Boulder Lectures in Theoretical Physics Vol. XA (1967), 141-176

2) I. V. Volovich and V. N. Sushko, Theor. Math. Phys. 9 (1971), 211-231 (in Russian)

3) W. Thirring, Ann. Phys. 3 (1958), 91-112.

4) A. S. Wightman, 1964 Cargèse Lectures in Theoretical Physics, pp. 171-291.

5) F. A. Berezin, Mat. Sb. 76 (1968), 3-25

6) D. A. Uhlenbrock, Commun. Math. Phys. 4 (1967), 64-76

尚 4)～6) に関連して次の解説がある.

麦林布道, 日本物理学会誌 24 (1969), 203-211.

7) F. A. Berezin, The Method of Second Quantization (Academic Press, New York - London, 1966)